

Modèles avec clusters théorie et applications aux marchés financiers

Simone Scotti

Université de Paris, LPSM

scotti@math.univ-paris-diderot.fr

Research supported by Institute Europlace de Finance
Research program “Clusters and Information Flow : Modelling, Analysis and Implications”

Webinaire SUMMIT

Index VIX

- L'index VIX donne la racine carré des swap de variance sur un mois pour le S&P
- Pour un sous-jacent $dS_t = S_t(r_t dt + \sqrt{V_t} dW_t)$

$$VIX_t = \sqrt{\mathbb{E} \left[\int_t^{T+t} V_s ds \mid \mathcal{F}_t \right]}$$

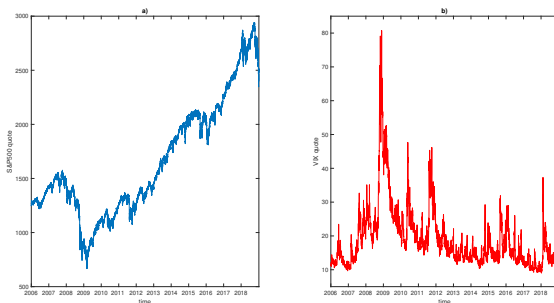


FIGURE – S&P and VIX. Source : Mancino et al. App Math Fin (2021)

Temps d'arrivé des sauts

On identifie les sauts (**uniquement positif**) à l'aide de la méthode proposée dans Callegaro et al. Math Fin Econ (2017).

Levy : arrivé selon un processus de Poisson homogène.

Test de Kolmogorov Smirnov : 4.45

Branching : arrivé selon un processus de Hawkes qui a le VIX², lui-même, comme intensité

Test de Kolmogorov Smirnov : 1.04

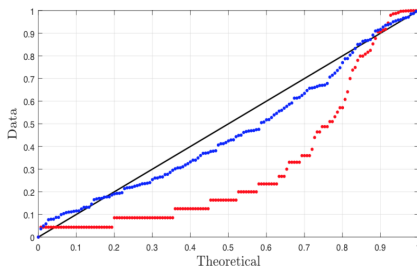


FIGURE – QQ-plot des intervalles entre deux sauts. Source : Bernis et al. Math Fin Econ (2021)

Resultats confirmés avec la variance reconstitué en accord avec Mancino et al. App Math Fin

(2021):

Le modèle α -Heston

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \sqrt{V_t}dB_t) \\ dV_t &= a(b - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t + \sigma_Z \sqrt[2]{V_t}dZ_t \end{aligned} \quad (1)$$

- Même paramètres que dans le cas Heston
- $Z = (Z_t, t \geq 0)$ est un α -stable compensé et au spectre positif, avec $\alpha \in (1, 2]$

$$\mathbb{E} [e^{-qZ_t}] = \exp \left\{ -\frac{tq^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)} \right\}, \quad q \geq 0.$$

Yiao et al. Fin Sto (2017)

Le point 0 est inaccessible si et seulement si $2ab \geq \sigma^2$, donc $V_t > 0$ presque sûrement. En particulier si $\sigma = 0$ alors le processus de volatilité ne touche jamais zero.

Estimation historique sur le VIX

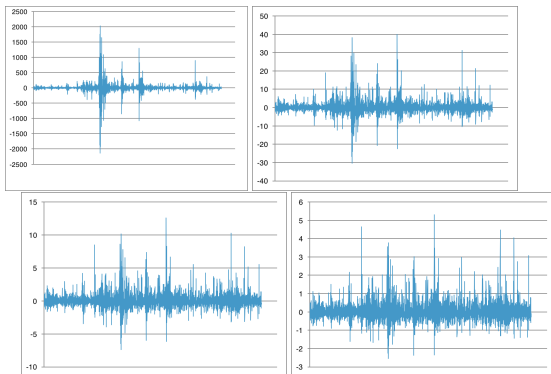


FIGURE – Incréments pure et relatifs $(VIX_{t+1}^2 - VIX_t^2)/(VIX_t^2)^{1/\alpha}$, for $\alpha = 2.0; 1.5; 1.26$. Source : travail en cours

Une optimisation entre le α de la renormalisation et celui de l'estimateur de la taille de sauts (Hill's tail-index estimator) donne $\alpha = 1.26$.

Modèle affine

- Le couple $(\log S_t, V_t)$ est un processus exponentielle affine avec le pseudo-fonctionnel de Riccati suivant

$$R(q_1, q_2) = \frac{1}{2}q_1^2 + \rho q_1 q_2 + \frac{\sigma^2}{2}q_2^2 - \frac{1}{2}q_1 - a q_2 - \frac{\sigma_Z^\alpha}{\cos(\pi\alpha/2)} (-q_2)^\alpha$$

$$F(q_1, q_2) = r q_1 + a b q_2.$$

- Dans Heston, $R_H(q_1, q_2) = \frac{1}{2}q_1^2 + \rho q_1 q_2 + \frac{\sigma^2}{2}q_2^2 - \frac{1}{2}q_1 - a q_2$

Volatilité implicite des options sur VIX

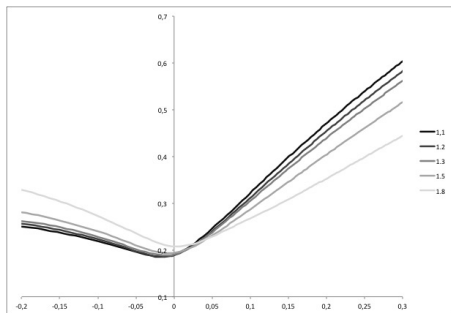


FIGURE – Vol implicite pour options sur VIX avec different valeur de alpha. Source : Yiao et al. Math Fin (2021)

Un modèle à activité finie : Gamma Ornstein-Uhlenbeck model driven by a Hawkes process

$$dX_t = \left[\frac{\lambda}{2} - \left(\frac{1}{2} + \int_{\mathbb{R}^+} (e^{-\rho z} - 1) \theta(dz) \right) \lambda_t \right] dt + \sqrt{\lambda_t - \underline{\lambda}} dW_t - \rho \int_{\mathbb{R}^+} z \mu(dt, dz),$$

$$\lambda_t := \lambda_0 + \beta \int_0^t (\underline{\lambda} - \lambda_s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^+} z \mu(ds, dz).$$

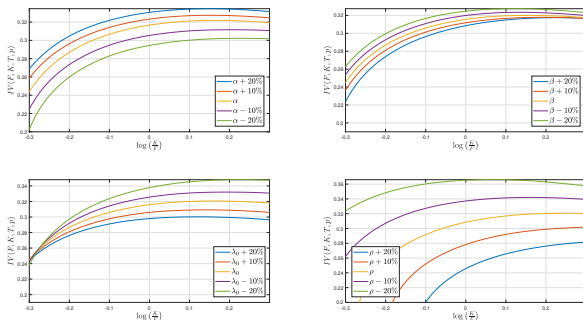


FIGURE – Vol implicite des options sur VIX. Source : Bernis et al. Math Fin Econ (2021)

Spikes dans les prix de l'électricité

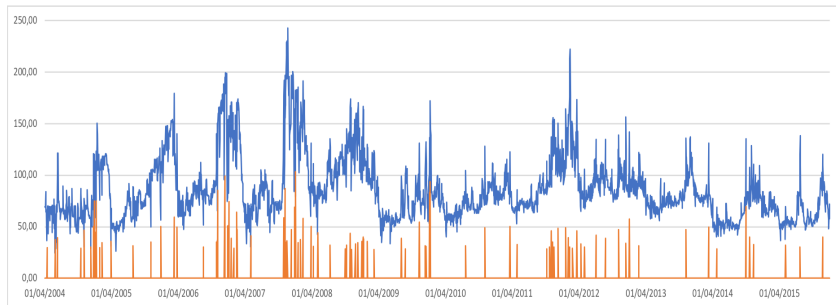


FIGURE – Single National Price (PUN at 7PM only working days) of electricity in Italy between April 2004 and December 2015 and large positive fluctuations. Callegaro et al SSRN (2020)

La aussi il y a des sauts en clusters.

Self-Exciting Spikes dans les prix de l'électricité et prime de risque

La structure à terme de la prime de risque peut passer de contango à backwardation

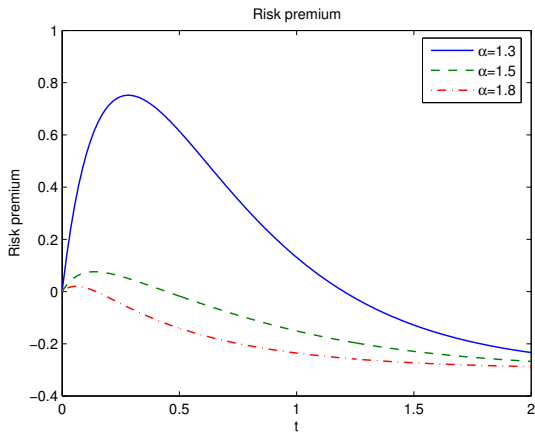


FIGURE – The Risk Premium Term Structure. Yao et al. Energy Economics (2019)

Un modèle pour les taux (avec persistance des taux faibles) : alpha-CIR

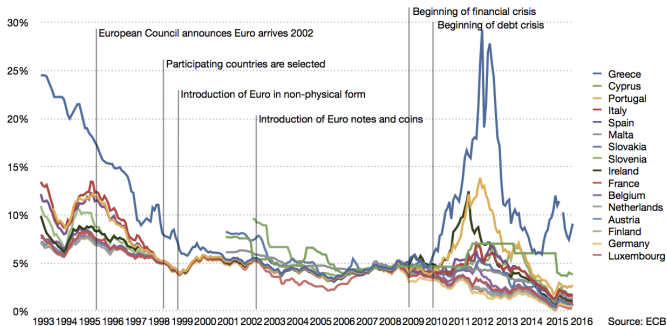


FIGURE – Taux long dans la zone Euro, Yao et al. Fin Sto (2017).

Décomposition en clusters du processus de variance (ou taux d'intérêt)

$$V_t = V_t^{(y)} + \sum_{k=1}^{J_t^{(y)}} u_{t-T_n}^{(k)}$$

Processus de base $V_t^{(y)}$ processus de variance sans sauts plus grand que un seul y .

Processus des comptage $J_t^{(y)}$ qui compte les sauts avant t

Processus fils $u^{(k)}$ sont des processus IID suivant un α -CIR avec $b = 0$ et associés a chaque grand saut

Les trois processus ont une écriture explicite en terme de processus de branchement.

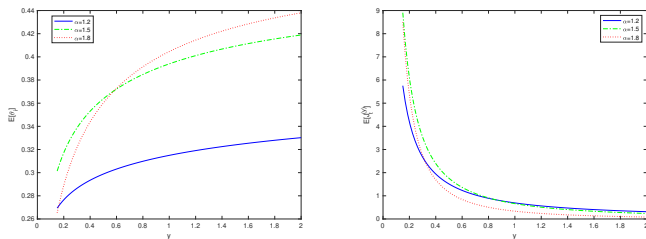


FIGURE – Espérance de la durée et nombre des clusters. Source : Yao et al. Math Fin (2021)

References

- Bernis, Brignone, S. and Sgarra : **A gamma Ornstein-Uhlenbeck model driven by a Hawkes process**, *Mathematics and Financial Economics*, <https://doi.org/10.1007/s11579-021-00295-0>
- Bernis and S. : **Clustering effects through Hawkes processes**, *From Probability to Finance - Lecture Notes of BICMR Summer School on Financial Mathematics*, 145-181.
- Callegaro, Mazzoran, Sgarra : **A self-Exciting modelling Framework for Forward Prices in Power Markets**, submitted, <https://arxiv.org/abs/1910.13286>
- Callegaro, Gaigi, S. and Sgarra : **Optimal investment in markets with over and under-reaction to Information**, 2017, *Mathematics and Financial Economics*, vol 11, issue 3, pp. 299-322
- Jiao, Ma and S. : **Alpha-CIR model in sovereign interest rate modelling**, 2017, *Finance and Stochastics*, vol 21, issue 3, pp. 789-813.
- Jiao, Ma, S. and Sgarra : **A branching process approach to power markets**, 2019, *Energy Economics*, 79, 144-156.
- Jiao, Ma, S and Zhou : **The alpha-Heston stochastic volatility model**, *Mathematical Finance*, <https://doi.org/10.1111/mafi.12306>
- Mancino, S. and Toscano : **Is the variance swap rate affine in the spot variance? Evidence from S&P500 data**, 2020, *Applied Mathematical Finance*, 27-4, 288-316.

Merci de votre attention